Matemáticas I
El cuerpo de los números reales

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

October 3, 2014

La recta real. Propiedades algebraicas

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

La recta real. Propiedades algebraicas

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Los números reales los vemos como puntos de una recta, la recta real, de modo que a cada punto de la recta le corresponde un único número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta. Los números reales se pueden sumar y multiplicar.

La recta real. Propiedades algebraicas

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Los números reales los vemos como puntos de una recta, la recta real, de modo que a cada punto de la recta le corresponde un único número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta. Los números reales se pueden sumar y multiplicar.

La suma y el producto de números reales tiene las siguientes propiedades:

La recta real. Propiedades algebraicas

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Los números reales los vemos como puntos de una recta, la recta real, de modo que a cada punto de la recta le corresponde un único número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta. Los números reales se pueden sumar y multiplicar.

La suma y el producto de números reales tiene las siguientes propiedades:

A1. Propiedades asociativas. $(x+y)+z=x+(y+z)$, $(x\,y)z=x(y\,z)$.

La recta real. Propiedades algebraicas

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Los números reales los vemos como puntos de una recta, la recta real, de modo que a cada punto de la recta le corresponde un único número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta. Los números reales se pueden sumar y multiplicar.

La suma y el producto de números reales tiene las siguientes propiedades:

A1. Propiedades asociativas. $(x+y)+z = x+(y+z)$, $(x\,y)z = x(y\,z)$.

A2. Propiedades conmutativas. $x+y = y+x$, $\quad x\,y = yx$.

La recta real. Propiedades algebraicas

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Los números reales los vemos como puntos de una recta, la recta real, de modo que a cada punto de la recta le corresponde un único número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta. Los números reales se pueden sumar y multiplicar.

La suma y el producto de números reales tiene las siguientes propiedades:

A1. Propiedades asociativas. $(x+y)+z = x+(y+z)$, $(x\,y)z = x(y\,z)$.

A2. Propiedades conmutativas. $x+y = y+x$, $\quad x\,y = yx$.

A3. Elementos neutros. El 0 y el 1 son tan importantes que enunciamos seguidamente sus propiedades: $0+x = x$, $1x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

La recta real. Propiedades algebraicas

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Los números reales los vemos como puntos de una recta, la recta real, de modo que a cada punto de la recta le corresponde un único número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta. Los números reales se pueden sumar y multiplicar.

La suma y el producto de números reales tiene las siguientes propiedades:

A1. Propiedades asociativas. $(x+y)+z=x+(y+z)$, $(x\,y)z=x(y\,z)$.

A2. Propiedades conmutativas. $x+y=y+x$, $\quad x\,y=yx$.

A3. Elementos neutros. El 0 y el 1 son tan importantes que enunciamos seguidamente sus propiedades: $0+x=x$, $1x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

A4. Elementos opuesto e inverso. Para cada $x\in\mathbb{R}$ hay un número real llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x$, tal que $x+(-x)=0$. Para cada número real $x\neq 0$ hay un número real llamado *inverso de* x, que representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1}=1$.

La recta real. Propiedades algebraicas

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Los números reales los vemos como puntos de una recta, la recta real, de modo que a cada punto de la recta le corresponde un único número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta. Los números reales se pueden sumar y multiplicar.

La suma y el producto de números reales tiene las siguientes propiedades:

A1. Propiedades asociativas. $(x+y)+z = x+(y+z)$, $(x\,y)z = x(y\,z)$.

A2. Propiedades conmutativas. $x+y = y+x$, $\quad x\,y = yx$.

A3. Elementos neutros. El 0 y el 1 son tan importantes que enunciamos seguidamente sus propiedades: $0+x = x$, $1x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A4. Elementos opuesto e inverso. Para cada $x \in \mathbb{R}$ hay un número real llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x$, tal que $x+(-x) = 0$. Para cada número real $x \neq 0$ hay un número real llamado *inverso de* x, que representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$.

A5. Propiedad distributiva. $(x+y)z = xz + y\,z$.

Propiedades de orden

Elegido un origen en la recta real al que corresponde el 0, los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. Se verifican las siguientes propiedades.

Propiedades de orden

Elegido un origen en la recta real al que corresponde el 0, los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. Se verifican las siguientes propiedades.

- **A6. Ley de tricotomía.** Para cada número real x se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$, x es positivo, $-x$ es positivo.

Propiedades de orden

Elegido un origen en la recta real al que corresponde el 0, los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. Se verifican las siguientes propiedades.

- **A6. Ley de tricotomía.** Para cada número real x se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$, x es positivo, $-x$ es positivo.
- **A7. Estabilidad de $\mathbb{R}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Propiedades de orden

Elegido un origen en la recta real al que corresponde el 0, los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. Se verifican las siguientes propiedades.

- **A6. Ley de tricotomía.** Para cada número real x se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$, x es positivo, $-x$ es positivo.
- **A7. Estabilidad de $\mathbb{R}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Propiedades de orden

Elegido un origen en la recta real al que corresponde el 0, los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. Se verifican las siguientes propiedades.

- **A6. Ley de tricotomía.** Para cada número real x se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$, x es positivo, $-x$ es positivo.
- **A7. Estabilidad de $\mathbb{R}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$ se llaman *números negativos*.

Relación de orden

Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase x *es menor que* y) o $y > x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^{+}$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que o bien es $x < y$ o bien es $x = y$.

Relación de orden

Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase x *es menor que* y) o $y > x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que o bien es $x < y$ o bien es $x = y$.

Notación. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}_o^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_o^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Relación de orden

Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase x *es menor que* y) o $y > x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que o bien es $x < y$ o bien es $x = y$.

Notación. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}_o^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_o^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades.

Relación de orden

Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase x *es menor que* y) o $y > x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que o bien es $x < y$ o bien es $x = y$.

Notación. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}_o^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_o^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades.

- $x \leqslant x$ (propiedad reflexiva).

Relación de orden

Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase x *es menor que* y) o $y > x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que o bien es $x < y$ o bien es $x = y$.

Notación. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}_o^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_o^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades.

- $x \leqslant x$ (propiedad reflexiva).
- $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ implican que $x = y$ (propiedad antisimétrica).

Relación de orden

Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase x *es menor que* y) o $y > x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que o bien es $x < y$ o bien es $x = y$.

Notación. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}_o^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_o^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades.

- $x \leqslant x$ (propiedad reflexiva).
- $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ implican que $x = y$ (propiedad antisimétrica).
- $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ implican que $x \leqslant z$ (propiedad transitiva).

Relación de orden

Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase x *es menor que* y) o $y > x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que o bien es $x < y$ o bien es $x = y$.

Notación. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}_o^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_o^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades.

- $x \leqslant x$ (propiedad reflexiva).
- $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ implican que $x = y$ (propiedad antisimétrica).
- $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ implican que $x \leqslant z$ (propiedad transitiva).
- Se verifica exactamente una de las tres relaciones: $x < y$, $x = y$, o $y < x$.

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z.$

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$.

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$.
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0.$

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$.
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0.$
- Si $xy > 0$ entonces $x < y \iff \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}.$

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Observa que $|x| = \max\{x, -x\}$, esto es, $|x|$ es el mayor de los números x y $-x$.

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Observa que $|x| = \max\{x, -x\}$, esto es, $|x|$ es el mayor de los números x y $-x$.

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Observa que $|x| = \max\{x, -x\}$, esto es, $|x|$ es el mayor de los números x y $-x$.

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que:

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Observa que $|x| = \max\{x, -x\}$, esto es, $|x|$ es el mayor de los números x y $-x$.

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que:

- $a = b \iff a^2 = b^2$.

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Observa que $|x| = \max\{x, -x\}$, esto es, $|x|$ es el mayor de los números x y $-x$.

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que:

- $a = b \iff a^2 = b^2$.
- $a < b \iff a^2 < b^2$.

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Observa que $|x| = \max\{x, -x\}$, esto es, $|x|$ es el mayor de los números x y $-x$.

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que:

- $a = b \iff a^2 = b^2$.
- $a < b \iff a^2 < b^2$.

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Observa que $|x| = \max\{x, -x\}$, esto es, $|x|$ es el mayor de los números x y $-x$.

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que:

- $a = b \iff a^2 = b^2$.
- $a < b \iff a^2 < b^2$.

Geométricamente, $|x|$ representa la distancia de x al origen, 0, en la recta real. De manera más general:

$$|x - y| = \text{distancia entre } x \text{ e } y$$

representa la longitud del segmento de extremos x e y.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

v) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$.

v) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

v) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

v) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

La propiedad v) se conoce como **(desigualdad triangular)**.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

v) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

La propiedad v) se conoce como **(desigualdad triangular)**.

Te recuerdo que debes leer de forma correcta las propiedades anteriores: no te fijes en las letras sino en los conceptos.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

v) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

La propiedad v) se conoce como **(desigualdad triangular)**.

Te recuerdo que debes leer de forma correcta las propiedades anteriores: no te fijes en las letras sino en los conceptos.La propiedad iii) debes leerla *"el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos"*. Por su parte, la desigualdad triangular dice dos cosas:

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

v) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

La propiedad v) se conoce como **(desigualdad triangular)**.

Te recuerdo que debes leer de forma correcta las propiedades anteriores: no te fijes en las letras sino en los conceptos.La propiedad iii) debes leerla *"el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos"*. Por su parte, la desigualdad triangular dice dos cosas:

- *El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos.*

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

v) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

La propiedad v) se conoce como **(desigualdad triangular)**.

Te recuerdo que debes leer de forma correcta las propiedades anteriores: no te fijes en las letras sino en los conceptos.La propiedad iii) debes leerla *"el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos"*. Por su parte, la desigualdad triangular dice dos cosas:

- *El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos.*
- *El valor absoluto de una suma es igual a la suma de los valores absolutos si, y sólo si, todos los sumandos son positivos o todos todos los sumandos son negativos.*

El axioma del continuo

A continuación establecemos la propiedad específica de los números reales.

El axioma del continuo

A continuación establecemos la propiedad específica de los números reales.

Axioma del continuo. Si A y B son conjuntos no vacíos de números reales tales que todo número de A es menor o igual que todo número de B, entonces se verifica que hay algún *número real* $z \in \mathbb{R}$ que *separa* los conjuntos A y B, es decir, z es mayor o igual que todos los números de A y menor o igual que todos los números de B.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él. Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él.
Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él. Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él.
Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$.
Tenemos que $0 < u < 1$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él. Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$. Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x + u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1 + 2x) = 2$$

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él.
Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$.
Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x+u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1+2x) = 2$$

Luego $v = x + u \in A$ y $x < v$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él.
Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número $w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$.
Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x + u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1 + 2x) = 2$$

Luego $v = x + u \in A$ y $x < v$.
Por el axioma del continuo hay un $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant z \leqslant y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Tenemos que $z \in \mathbb{R}^+$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Dado un número en B siempre hay otro número en B menor que él.
Concretamente, dado $y \in B$ se comprueba con facilidad que el número
$w = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$ verifica que $w < y$ y $w \in B$.

Dado un número en A siempre hay otro número en A mayor que él.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$.
Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x+u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1+2x) = 2$$

Luego $v = x + u \in A$ y $x < v$.
Por el axioma del continuo hay un $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant z \leqslant y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$. Tenemos que $z \in \mathbb{R}^+$.
Por lo antes visto, z no puede estar ni en A ni en B, es decir no puede ser $z^2 < 2$ ni tampoco $z^2 > 2$. Luego ha de ser $z^2 = 2$.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Se dice que E está *mayorado o acotado superiormente* si hay algún número $v \in \mathbb{R}$ que verifique que $x \leqslant v$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que v es un *mayorante o cota superior* de E.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Se dice que E está *mayorado o acotado superiormente* si hay algún número $v \in \mathbb{R}$ que verifique que $x \leqslant v$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que v es un *mayorante o cota superior* de E.

ii) Se dice que E está *minorado o acotado inferiormente* si hay algún número $u \in \mathbb{R}$ que verifique que $u \leqslant x$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que u es un *minorante o cota inferior* de E.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Se dice que E está *mayorado o acotado superiormente* si hay algún número $v \in \mathbb{R}$ que verifique que $x \leqslant v$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que v es un *mayorante o cota superior* de E.

ii) Se dice que E está *minorado o acotado inferiormente* si hay algún número $u \in \mathbb{R}$ que verifique que $u \leqslant x$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que u es un *minorante o cota inferior* de E.

iii) Se dice que E está *acotado* si está mayorado y minorado.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Se dice que E está *mayorado o acotado superiormente* si hay algún número $v \in \mathbb{R}$ que verifique que $x \leqslant v$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que v es un *mayorante o cota superior* de E.
ii) Se dice que E está *minorado o acotado inferiormente* si hay algún número $u \in \mathbb{R}$ que verifique que $u \leqslant x$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que u es un *minorante o cota inferior* de E.
iii) Se dice que E está *acotado* si está mayorado y minorado.
iv) Si hay algún elemento de E que también sea mayorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *máximo* de E y lo representaremos por $\max(E)$.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Se dice que E está *mayorado o acotado superiormente* si hay algún número $v \in \mathbb{R}$ que verifique que $x \leqslant v$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que v es un *mayorante o cota superior* de E.

ii) Se dice que E está *minorado o acotado inferiormente* si hay algún número $u \in \mathbb{R}$ que verifique que $u \leqslant x$ para todo $x \in E$. En tal caso se dice que u es un *minorante o cota inferior* de E.

iii) Se dice que E está *acotado* si está mayorado y minorado.

iv) Si hay algún elemento de E que también sea mayorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *máximo* de E y lo representaremos por $\max(E)$.

v) Si hay algún elemento de E que también sea minorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *mínimo* de E y lo representaremos por $\min(E)$.

Principios del supremo y del ínfimo

Principio del supremo. Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

Principios del supremo y del ínfimo

Principio del supremo. Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

Principio del ínfimo. Para todo conjunto de números reales no vacío y minorado se verifica que el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Supremo e ínfimo

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Supremo e ínfimo

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Observa que

$$z \geqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \geqslant \sup(E)$$

Supremo e ínfimo

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Observa que

$$z \geqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \geqslant \sup(E)$$

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Supremo e ínfimo

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Observa que

$$z \geqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \geqslant \sup(E)$$

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Observa que

$$z \leqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \leqslant \inf(E)$$

Intervalos de números reales

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Intervalos de números reales

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Los intervalos de números reales pueden ser fácilmente descritos gracias a los principios del supremo y del ínfimo.

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de $\emptyset$, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de $\emptyset$, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.

Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de $\emptyset$, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$[a, b] \quad = \quad \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \quad \text{(intervalo cerrado y acotado)}$$

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \quad \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{(intervalo abierto)}
\end{aligned}
$$

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de $\emptyset$, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} && \text{(intervalo cerrado y acotado)}\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto)}\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} && \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)}
\end{aligned}
$$

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$
\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{array}
$$

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.

Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$
\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{array}
$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de $\emptyset$, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{array}{lcll} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\ ]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\ [a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\ ]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)} \end{array}$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$]-\infty, c[\quad = \quad \{x \in \mathbb{R} : x < c\} \quad \text{(semirrecta abierta a la izquierda)}$$

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de $\varnothing$, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{array}$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$\begin{array}{lcll}
]-\infty,c[& = & \{x \in \mathbb{R} : x < c\} & \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\
]-\infty,c] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)}
\end{array}$$

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} && \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} && \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} && \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{aligned}
$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$
\begin{aligned}
]-\infty,c[&= \{x \in \mathbb{R} : x < c\} && \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\
]-\infty,c] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} && \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)} \\
]c,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > c\} && \text{(semirrecta abierta a la derecha)}
\end{aligned}
$$

Intervalos de números reales

Además de $\mathbb{R}$ y de $\emptyset$, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} && \text{(intervalo cerrado y acotado)}\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto)}\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} && \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)}\\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} && \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{aligned}$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$\begin{aligned}
]-\infty,c[&= \{x \in \mathbb{R} : x < c\} && \text{(semirrecta abierta a la izquierda)}\\
]-\infty,c] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} && \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)}\\
]c,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > c\} && \text{(semirrecta abierta a la derecha)}\\
[c,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\} && \text{(semirrecta cerrada a la derecha)}
\end{aligned}$$

Números naturales. Principio de inducción

Un conjunto A de números reales se llama *inductivo* si $1 \in A$ y siempre que un número real x está en A se verifica que $x + 1$ también está en A.

Números naturales. Principio de inducción

Un conjunto A de números reales se llama *inductivo* si $1 \in A$ y siempre que un número real x está en A se verifica que $x + 1$ también está en A.

El conjunto de los números naturales, que representaremos por $\mathbb{N}$, es la intersección de todos los conjuntos inductivos de números reales.

Números naturales. Principio de inducción

Un conjunto A de números reales se llama *inductivo* si $1 \in A$ y siempre que un número real x está en A se verifica que $x+1$ también está en A.

El conjunto de los números naturales, que representaremos por $\mathbb{N}$, es la intersección de todos los conjuntos inductivos de números reales.

Es claro que $\mathbb{N}$ es él mismo un conjunto inductivo: es el "más pequeño" conjunto inductivo de números reales. Este hecho, que se deduce directamente de la definición de $\mathbb{N}$, constituye el llamado "principio de inducción matemática".

Números naturales. Principio de inducción

Un conjunto A de números reales se llama *inductivo* si $1 \in A$ y siempre que un número real x está en A se verifica que $x + 1$ también está en A.

El conjunto de los números naturales, que representaremos por $\mathbb{N}$, es la intersección de todos los conjuntos inductivos de números reales.

Es claro que $\mathbb{N}$ es él mismo un conjunto inductivo: es el "más pequeño" conjunto inductivo de números reales. Este hecho, que se deduce directamente de la definición de $\mathbb{N}$, constituye el llamado "principio de inducción matemática".

Principio de inducción matemática. *Si A es un conjunto inductivo de números naturales entonces $A = \mathbb{N}$.*

Principio de inducción matemática

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

Principio de inducción matemática

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

Principio de inducción matemática

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

B) Comprobamos que *si* un número n satisface la propiedad, *entonces* también el número $n+1$ la satisface. Es decir comprobamos que *si* $P(n)$ es cierta, *entonces* también lo es $P(n+1)$.

Principio de inducción matemática

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

B) Comprobamos que *si* un número n satisface la propiedad, *entonces* también el número $n+1$ la satisface. Es decir comprobamos que *si* $P(n)$ es cierta, *entonces* también lo es $P(n+1)$.

Principio de inducción matemática

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

B) Comprobamos que *si* un número n satisface la propiedad, *entonces* también el número $n+1$ la satisface. Es decir comprobamos que *si* $P(n)$ es cierta, *entonces* también lo es $P(n+1)$.

Observa que en B) no se dice que se tenga que probar que $P(n)$ es cierta, sino que hay que *demostrar la implicación lógica* $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$. Para demostrar dicha implicación lo que hacemos es *suponer* que $P(n)$ es cierta.

Números enteros y racionales

Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

Números enteros y racionales

Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

Los números reales de la forma p/q donde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ se llaman números *racionales*. El conjunto de todos ellos lo representamos por $\mathbb{Q}$.

Números enteros y racionales

Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

Los números reales de la forma p/q donde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ se llaman números *racionales*. El conjunto de todos ellos lo representamos por $\mathbb{Q}$.

Los números reales que no son racionales se llaman irracionales.

Números enteros y racionales

Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

Los números reales de la forma p/q donde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ se llaman números *racionales*. El conjunto de todos ellos lo representamos por $\mathbb{Q}$.

Los números reales que no son racionales se llaman irracionales.

Sabemos que hay un número real z que verifica que $z^2 = 2$. Dicho número es irracional.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$. Para ello se calculan las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$. Para ello se calculan las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con *coeficientes enteros* y *coeficiente del término de mayor grado igual a 1*, pues sabemos que *dichas raíces deben ser divisores del término independiente*.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$. Para ello se calculan las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con *coeficientes enteros* y *coeficiente del término de mayor grado igual a 1*, pues sabemos que *dichas raíces deben ser divisores del término independiente*.

Ejercicio 1. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 7x + 2 > 0$.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$. Para ello se calculan las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con *coeficientes enteros* y *coeficiente del término de mayor grado igual a 1*, pues sabemos que *dichas raíces deben ser divisores del término independiente*.

Ejercicio 1. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 7x + 2 > 0$.
Ejercicio 2. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 < 0$.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$. Para ello se calculan las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con *coeficientes enteros* y *coeficiente del término de mayor grado igual a 1*, pues sabemos que *dichas raíces deben ser divisores del término independiente*.

Ejercicio 1. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 7x + 2 > 0$.
Ejercicio 2. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 < 0$.

Si nos piden estudiar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica una desigualdad del tipo $p(x) < q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta observar que $p(x) < q(x) \iff q(x) - p(x) > 0$, y que $q(x) - p(x)$ es una función polinómica por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$. Para ello se calculan las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con *coeficientes enteros* y *coeficiente del término de mayor grado igual a 1*, pues sabemos que *dichas raíces deben ser divisores del término independiente*.

Ejercicio 1. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 7x + 2 > 0$.
Ejercicio 2. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 < 0$.

Si nos piden estudiar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica una desigualdad del tipo $p(x) < q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta observar que $p(x) < q(x) \iff q(x) - p(x) > 0$, y que $q(x) - p(x)$ es una función polinómica por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Ejercicio 3. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^3 + x^2 - x \geqslant 2 - x^2$.

Desigualdades definidas por polinomios de segundo grado

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ donde se supone que a, b, c son números reales y $a > 0$. Sea $E = \{x \in \mathbb{R} : \ p(x) > 0\}$.

Desigualdades definidas por polinomios de segundo grado

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ donde se supone que a, b, c son números reales y $a > 0$. Sea $E = \{x \in \mathbb{R} : \; p(x) > 0\}$.

Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene:

Desigualdades definidas por polinomios de segundo grado

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ donde se supone que a, b, c son números reales y $a > 0$. Sea $E = \{x \in \mathbb{R} : \ p(x) > 0\}$.

Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene:

- Dos soluciones reales distintas $\alpha < \beta$ (discriminante positivo), entonces $E =]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$.

Desigualdades definidas por polinomios de segundo grado

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ donde se supone que a, b, c son números reales y $a > 0$. Sea $E = \{x \in \mathbb{R} : \ p(x) > 0\}$.

Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene:

- Dos soluciones reales distintas $\alpha < \beta$ (discriminante positivo), entonces $E =]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$.
- Una solución real doble α (discriminante nulo), entonces $E =]-\infty, \alpha[\cup]\alpha, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$.

Desigualdades definidas por polinomios de segundo grado

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ donde se supone que a, b, c son números reales y $a > 0$. Sea $E = \{x \in \mathbb{R} : \ p(x) > 0\}$.

Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene:

- Dos soluciones reales distintas $\alpha < \beta$ (discriminante positivo), entonces $E =]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$.
- Una solución real doble α (discriminante nulo), entonces $E =]-\infty, \alpha[\cup]\alpha, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$.
- No tiene soluciones reales (discriminante negativo), entonces $E = \mathbb{R}$.

Desigualdades definidas por funciones racionales

Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$.

Desigualdades definidas por funciones racionales

Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$.Basta observar para ello que

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \iff p(x)q(x) > 0$$

y esta última desigualdad es del tipo ya estudiado porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Desigualdades definidas por funciones racionales

Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$.Basta observar para ello que

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \iff p(x)q(x) > 0$$

y esta última desigualdad es del tipo ya estudiado porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Ejercicio 4. Calcula para qué valores de x se verifica que $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} > 0$.

Desigualdades definidas por funciones racionales

Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$.Basta observar para ello que

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \iff p(x)q(x) > 0$$

y esta última desigualdad es del tipo ya estudiado porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Ejercicio 4. Calcula para qué valores de x se verifica que $\dfrac{x^2-6x+5}{x-3} > 0$.

Si nos piden estudiar para qué valores de la variable x se verifica una desigualdad del tipo
$R(x) < Q(x)$, donde $R(x)$ y $Q(x)$ son funciones racionales, basta observar que la desigualdades $R(x) < Q(x)$ y $Q(x) - R(x) > 0$ son equivalentes y que $Q(x) - R(x)$ es una función racional por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Desigualdades definidas por funciones racionales

Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$.Basta observar para ello que

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \iff p(x)q(x) > 0$$

y esta última desigualdad es del tipo ya estudiado porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Ejercicio 4. Calcula para qué valores de x se verifica que $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} > 0$.

Si nos piden estudiar para qué valores de la variable x se verifica una desigualdad del tipo
$R(x) < Q(x)$, donde $R(x)$ y $Q(x)$ son funciones racionales, basta observar que la desigualdades $R(x) < Q(x)$ y $Q(x) - R(x) > 0$ son equivalentes y que $Q(x) - R(x)$ es una función racional por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Ejercicio 5. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\dfrac{1 - 2x}{x^2 - 4} > \dfrac{1}{2}$.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos en los que se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos en los que se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0.$

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos en los que se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0.$
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x).$

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos en los que se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0.$
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x) \text{ o } f(x) = -g(x).$
- $|f(x)| \leqslant g(x) \iff -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x).$

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos en los que se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0$.
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$.
- $|f(x)| \leqslant g(x) \iff -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
- $|f(x)| \geqslant a \iff f(x) \geqslant a$ o $f(x) \leqslant -a$ donde se supone que $a > 0$.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos en los que se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0$.
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x) \text{ o } f(x) = -g(x)$.
- $|f(x)| \leqslant g(x) \iff -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
- $|f(x)| \geqslant a \iff f(x) \geqslant a \text{ o } f(x) \leqslant -a$ donde se supone que $a > 0$.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos en los que se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0.$
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x) \text{ o } f(x) = -g(x).$
- $|f(x)| \leqslant g(x) \iff -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x).$
- $|f(x)| \geqslant a \iff f(x) \geqslant a \text{ o } f(x) \leqslant -a$ donde se supone que $a > 0$.

Ejercicio 6. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|x+1| + \left|x^2 - 3x + 2\right| < 4$.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos en los que se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0.$
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x).$
- $|f(x)| \leqslant g(x) \iff -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x).$
- $|f(x)| \geqslant a \iff f(x) \geqslant a$ o $f(x) \leqslant -a$ donde se supone que $a > 0$.

Ejercicio 6. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|x+1| + \left|x^2 - 3x + 2\right| < 4.$

Ejercicio 7. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad $\left|x^2 + 3x - 9\right| = \left|x^2 + x - 6\right| + |2x - 3|.$

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos en los que se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0.$
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x).$
- $|f(x)| \leqslant g(x) \iff -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x).$
- $|f(x)| \geqslant a \iff f(x) \geqslant a$ o $f(x) \leqslant -a$ donde se supone que $a > 0$.

Ejercicio 6. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|x+1| + \left|x^2-3x+2\right| < 4.$

Ejercicio 7. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad $\left|x^2+3x-9\right| = \left|x^2+x-6\right| + |2x-3|.$

Ejercicio 8. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\left|\dfrac{x-2}{x^2-2x-1}\right| > \dfrac{1}{2}.$

Ejercicios propuestos

1. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 2x^3 - x + 2 > 0$.
2. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 2x^2 > x^2 - 2$.
3. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\dfrac{x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1} > 0$.
4. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\dfrac{2x - 3}{x + 2} < \dfrac{1}{3}$.
5. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left|\dfrac{x^3 - 5}{x^2 - 2x - 3}\right| \leqslant 1$.
6. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|-x + |x - 1|| < 2$.
7. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes desigualdades.

a) $|x+5| < |x-1|$, b) $|x-1|\,|x+2| = 3$, c) $\left|x^2 - x\right| > 1$, d) $|x-y+z| = |x| - |z-y|$

8. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes desigualdades.

a) $|x+1| + |x-1| < 1$, b) $|2x - |2x-1|| = -2x$, c) $|2 + |x+1|| < 3$.

9. Supuesto que $0 < a < b$, calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$